

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2025

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΜΑΘΗΜΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ' ΓΕΛ

ΩΡΑ ΑΝΑΡΤΗΣΗΣ

13:45



φροντιστήρια
πουκαμισάς

Ο ΜΕΓΑΛΥΤΕΡΟΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑΚΟΣ ΟΜΙΛΟΣ ΣΤΗΝ ΕΛΛΑΔΑ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ – ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 02/06/2025

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ Α

A.1. σχολικό βιβλίο σελ. 186

Κάθε συνάρτηση της μορφής $G(x) = F(x) + c$, όπου $c \in \mathbb{R}$, είναι μια παράγουσα της f στο Δ , αφού $G'(x) = (F(x) + c)' = F'(x) = f(x)$, για κάθε $x \in \Delta$.

• Έστω G είναι μια άλλη παράγουσα της f στο Δ . Τότε για κάθε $x \in \Delta$ ισχύουν $F'(x) = f(x)$ και $G'(x) = f(x)$, οπότε $G'(x) = F'(x)$, για κάθε $x \in \Delta$. Άρα, υπάρχει σταθερά $c \in \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε $G(x) = F(x) + c$, για κάθε $x \in \Delta$.

A.2. σχολικό βιβλίο σελ. 76

Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν:

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και
- $f(\alpha) \neq f(\beta)$

τότε, για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = \eta$.

A.3. σχολικό βιβλίο σελ. 161

Αν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$, τότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f .

A.4. α) Σ β) Σ γ) Λ δ) Λ ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

B.1. Έχουμε τη συνάρτηση $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + 9x - 3$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$.

Η f είναι συνεχής ως πολυωνυμική στο $D_f = \mathbb{R}$ και παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 1$. Επομένως από θεώρημα Fermat θα ισχύει $f'(1) = 0$.

$$f'(x) = 3x^2 + 2\alpha x + 9, \alpha \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$$

$$f'(1) = 0 \Leftrightarrow 3 \cdot 1^2 + 2\alpha \cdot 1 + 9 = 0 \Leftrightarrow 3 + 2\alpha + 9 = 0 \Leftrightarrow 2\alpha = -12 \Leftrightarrow \alpha = -6$$

Για $\alpha = -6$ έχουμε ότι $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$, $x \in \mathbb{R}$

B.2. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$, $x \in \mathbb{R}$ και $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x-1)(x-3)$, $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3(x-1)(x-3) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = 3$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 3(x-1)(x-3) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow 3(x-1)(x-3) < 0 \Leftrightarrow x \in (1, 3)$$

Η μονοτονία της συνάρτησης f προκύπτει από τον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	+	○	○	+
f	↗	Τ.ΜΕΓ.	Τ.ΕΛ.	↗

Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, 1]$ και $[3, +\infty)$.

Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[1, 3]$.

Για $A_1 = (0, 1)$ η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα άρα $f(A_1) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \right)$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^3 - 6x^2 + 9x - 3) = 0^3 - 6 \cdot 0^2 + 9 \cdot 0 - 3 = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^3 - 6x^2 + 9x - 3) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 - 3 = 1$$

$$\text{Άρα } f(A_1) = (-3, 1)$$

Το $0 \in f(A_1)$ άρα υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο A_1 και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $A_1 = (0, 1)$, η ρίζα αυτή είναι μοναδική.

Για $A_2 = [1, 3]$ η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα άρα $f(A_2) = [f(3), f(1)]$

$$f(3) = 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 - 3 = 27 - 54 + 27 - 3 = -3$$

$$f(1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 - 3 = 1 - 6 + 9 - 3 = 1$$

$$\text{Άρα } f(A_2) = [-3, 1]$$

Το $0 \in f(A_2)$ άρα υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο A_2 και επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $A_2 = [1, 3]$, η ρίζα αυτή είναι μοναδική.

Για $A_3 = (3, +\infty)$ η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα άρα $f(A_3) = \left(\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right)$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (x^3 - 6x^2 + 9x - 3) = 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 - 3 = 27 - 54 + 27 - 3 = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 6x^2 + 9x - 3) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3) = +\infty$$

Άρα $f(A_3) = (-3, +\infty)$

Το $0 \in f(A_3)$ άρα υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο A_3 και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $A_3 = (3, +\infty)$, η ρίζα αυτή είναι μοναδική.

Η f είναι πολωνυμική συνάρτηση 3ου βαθμού, άρα έχει το πολύ 3 ρίζες. Έτσι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει 3 ακριβώς θετικές ρίζες αφού $0 < \rho_1 < 1 < \rho_2 < 3 < \rho_3$, όπου ρ_1, ρ_2, ρ_3 οι ρίζες της $f(x) = 0$.

B.3. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3, x \in \mathbb{R}, f'(x) = 3x^2 - 12x + 9, x \in \mathbb{R}$

Έχουμε $f''(x) = 6x - 12, x \in \mathbb{R}$ και

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 12 = 0 \Leftrightarrow 6x = 12 \Leftrightarrow x = 2$$

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow 6x - 12 > 0 \Leftrightarrow 6x > 12 \Leftrightarrow x > 2$$

$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow 6x - 12 < 0 \Leftrightarrow 6x < 12 \Leftrightarrow x < 2$$

Η κυρτότητα της συνάρτησης f προκύπτει από τον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	-	$\bigcirc$	+
f	$\cap$	Σ.Κ.	$\cup$

Η συνάρτηση f είναι κοίλη στο διάστημα $(-\infty, 2]$.

Η συνάρτηση f είναι κυρτή στο διάστημα $[2, +\infty)$.

Η συνάρτηση f παρουσιάζει σημείο καμψής στο $x = 2$ το

$$f(2) = 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 9 \cdot 2 - 3 = 8 - 24 + 18 - 3 = -1 \text{ δηλαδή το σημείο } A(2, -1).$$

B.4. $g(x) = x + f(x) = x + x^3 - 6x^2 + 9x - 3 = x^3 - 6x^2 + 10x - 3, x \in \mathbb{R}$

Έστω ε_1 η εξίσωση της ζητούμενης εφαπτόμενης της C_f στο A .

$$(\varepsilon_1): y - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi) \Leftrightarrow y = f'(\xi) \cdot x - f'(\xi) \cdot \xi + f(\xi)$$

Τέμνει τον άξονα $y'y$, άρα για $x = 0$ έχουμε $(\varepsilon_1): y - f(\xi) = f'(\xi)\xi \Leftrightarrow y = -f'(\xi) \cdot \xi + f(\xi)$

Έστω ε_2 η εξίσωση της ζητούμενης εφαπτόμενης της C_g στο B .

$$(\varepsilon_2): y - g(\xi) = g'(\xi)(x - \xi) \Leftrightarrow y = g'(\xi) \cdot x - g'(\xi) \cdot \xi + g(\xi)$$

Τέμνει τον άξονα $y'y$, άρα για $x = 0$ έχουμε $(\varepsilon_2): y - g(\xi) = g'(\xi)\xi \Leftrightarrow y = -g'(\xi) \cdot \xi + g(\xi)$

Για να τέμνονται οι $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ πάνω στον άξονα $y'y$ πρέπει:

$$\begin{aligned} -f'(\xi) \cdot \xi + f(\xi) &= -g'(\xi) \cdot \xi + g(\xi) \Leftrightarrow -f'(\xi) \cdot \xi + \cancel{f(\xi)} = -g'(\xi) \cdot \xi + \cancel{f(\xi)} + \xi \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -f'(\xi) \cdot \xi = \xi(-g'(\xi) + 1) \Leftrightarrow -f'(\xi) \cdot \xi = -g'(\xi) \cdot \xi + \xi \Leftrightarrow g'(\xi) \cdot \xi - f'(\xi) \cdot \xi = \xi \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (g'(\xi) - f'(\xi)) \cdot \xi = \xi \end{aligned}$$

Που ισχύει γιατί $g(x) = x + f(x)$ άρα $g'(x) = 1 + f'(x) \Leftrightarrow g'(x) - f'(x) = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

β' τρόπος

Ψάχνουμε εξισώσεις της μορφής:

$$y - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi) \Leftrightarrow y = f'(\xi) \cdot x - f'(\xi) \cdot \xi + f(\xi) \text{ και}$$

$$y - g(\xi) = g'(\xi)(x - \xi) \Leftrightarrow y = g'(\xi) \cdot x - g'(\xi) \cdot \xi + g(\xi)$$

Για $x = 0$ έχουμε

$$\begin{aligned} y &= -f'(\xi) \cdot \xi + f(\xi) \Leftrightarrow y = -\xi(3\xi^2 - 12\xi + 9) + \xi^3 - 6\xi^2 + 9\xi - 3 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow y = -3\xi^3 + 12\xi^2 - 9\xi + \xi^3 - 6\xi^2 + 9\xi - 3 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow y = -2\xi^3 + 6\xi^2 - 3 \end{aligned}$$

Ομοίως για $x = 0$ έχουμε

$$\begin{aligned} y &= -g'(\xi) \cdot \xi + g(\xi) \Leftrightarrow y = -\xi(3\xi^2 - 12\xi + 10) + \xi^3 - 6\xi^2 + 10\xi - 3 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow y = -3\xi^3 + 12\xi^2 - 10\xi + \xi^3 - 6\xi^2 + 10\xi - 3 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow y = -2\xi^3 + 6\xi^2 - 3 \end{aligned}$$

Άρα οι εφαπτόμενες των C_f και C_g στα σημεία $A(\xi, f(\xi))$ και $B(\xi, g(\xi))$ τέμνονται στον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0, -2\xi^3 + 6\xi^2 - 3)$.

ΘΕΜΑ Γ

$$f(x) = \begin{cases} e^x \cdot \eta\mu x, & x < 0 \\ \sqrt{x^2 + x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

Γ.1. Για να είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ πρέπει $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x \eta\mu x = e^0 \eta\mu 0 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x^2 + x} = \sqrt{0^2 + 0} = 0 \\ f(0) &= \sqrt{0^2 + 0} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = 0$$

Άρα η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x \eta\mu x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(e^x \frac{\eta\mu x}{x} \right) = e^0 \cdot 1 = 1$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x} \right)}}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{x} \stackrel{x > 0}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{1 + \frac{1}{x}} = +\infty \end{aligned}$$

Τα πλευρικά όρια δεν είναι ίσα άρα η συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

Γ.2. Η συνάρτηση f έχει $A_f = \mathbb{R}$ και είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, αφού δείξαμε ότι είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ και

για $x < 0$ είναι συνεχής ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων, εκθετικής και τριγωνομετρικής και για $x > 0$ συνεχής ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων.

Άρα η C_f δεν θα έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

Οπότε για πλάγιες/οριζόντιες ασύμπτωτες θα ψάξουμε στο $+\infty$ και στο $-\infty$.

Πλάγια στο $+\infty$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x} \right)}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{x} \stackrel{x > 0}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x}} = 1 + 0 = 1 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x} - x)(\sqrt{x^2 + x} + x)}{(\sqrt{x^2 + x} + x)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x - x^2}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1} = \frac{1}{2} \text{ αφού } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Άρα $y = x + \frac{1}{2}$ πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Οριζόντια στο $-\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x \eta \mu x) = 0 \text{ διότι } -1 \leq \eta \mu x \leq 1 \Leftrightarrow -e^x \leq e^x \eta \mu x \leq e^x$$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ άρα από κριτήριο παρεμβολής $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \cdot \eta \mu x = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ οπότε η $y = 0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

Γ.3. Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x) = x + \frac{1}{2}$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα $\xi \in (-\pi, 0)$.

$$\text{Έστω } g(x) = f(x) - x - \frac{1}{2}, \quad x \in [-\pi, 0]$$

Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $[-\pi, 0]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

$$\left. \begin{aligned} g(-\pi) &= f(-\pi) + \pi - \frac{1}{2} = e^{-\pi} \cdot \eta \mu(-\pi) + \pi - \frac{1}{2} = \pi - \frac{1}{2} > 0 \\ g(0) &= f(0) - 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} < 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow g(-\pi) \cdot g(0) < 0$$

Άρα από θεώρημα Bolzano, υπάρχει $x_0 \in (-\pi, 0)$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0$. Άρα η δοθείσα εξίσωση έχει τουλάχιστον μία λύση στο διάστημα $(-\pi, 0)$.

Γ.4. Έστω $M(x(t), y(t))$ με $y(t) = \sqrt{x^2(t) + x(t)}$ με $x'(t) > 0$ και $x(t) > 0$ αφού δεν ορίζεται το $f'(0)$.

$$\text{Για } y'(t) = x'(t) \Leftrightarrow \frac{2x(t)x'(t) + x'(t)}{2\sqrt{x^2(t) + x(t)}} = x'(t) \xRightarrow{x'(t) > 0} \frac{2x(t) + 1}{2\sqrt{x^2(t) + x(t)}} = 1 \Leftrightarrow 2x(t) + 1 = 2\sqrt{x^2(t) + x(t)}$$

Και τα δύο μέλη είναι θετικά άρα υψώνοντας στο τετράγωνο έχουμε

$$\begin{aligned} [2x(t) + 1]^2 &= [2\sqrt{x^2(t) + x(t)}]^2 \Leftrightarrow 4x^2(t) + 4x(t) + 1 = 4[x^2(t) + x(t)] \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \cancel{4x^2(t)} + \cancel{4x(t)} + 1 = \cancel{4x^2(t)} + \cancel{4x(t)} \Leftrightarrow 1 = 0 \text{ αδύνατο} \end{aligned}$$

Οπότε δεν υπάρχει χρονική στιγμή $t_0 \geq 0$ ώστε ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του σημείου M να είναι ίσος με τον ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του.

ΘΕΜΑ Δ

Δ.1. $x \cdot f(x) = 2 \cdot F(x) \cdot \ln x$, $x > 0$

Η F είναι παραγωγίσιμη $F'(x) = f(x)$, $x > 0$

Άρα $x^{\ln x} = e^{\ln x \cdot \ln x} = e^{\ln^2 x}$ παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Έχουμε $(x^{\ln x})' = (e^{\ln x \cdot \ln x})' = e^{\ln^2 x} (\ln^2 x)' = e^{\ln^2 x} \cdot 2 \ln x (\ln x)' = x^{\ln x} \cdot \frac{2 \ln x}{x}$

g παραγωγίσιμη με

$$g'(x) = \frac{F'(x) \cdot x^{\ln x} - F(x) (x^{\ln x})'}{(x^{\ln x})^2} = \frac{f(x) \cdot x^{\ln x} - F(x) \frac{x^{\ln x} \cdot 2 \ln x}{x}}{(x^{\ln x})^2}$$

$$= \frac{\frac{2F(x) \ln x}{x} x^{\ln x} - \frac{2F(x) \ln x}{x} x^{\ln x}}{(x^{\ln x})^2} = 0$$

Άρα g σταθερή στο $(0, +\infty)$ επομένως υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε

$$g(x) = c \Rightarrow \frac{F(x)}{x^{\ln x}} = c, x > 0$$

Ισχύει ότι $f'(1) = 2$ αφού η εφαπτομένη της C_f στο $M(1, f(1))$ είναι παράλληλη στην $y = 2x$.

Δ.2. i) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{f(x)}{x-1}}{\frac{\ln x}{x-1}} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1}}{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1}} = \frac{2}{1} = 2$ άρα $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x} = 2$

διότι $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} \stackrel{f(1)=0}{=} f'(1) = 2$ και

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - \ln 1}{x-1} = (\ln x)' \Big|_{x=1} = \frac{1}{x} \Big|_{x=1} = 1$$

ii) Από τη σχέση $x \cdot f(x) = 2F(x) \ln x \Rightarrow F(x) = \frac{x \cdot f(x)}{2 \ln x}, x > 0, x \neq 1$

Η F είναι παραγωγίσιμη άρα F συνεχής στο $x_0 = 1$

$$F(1) = \lim_{x \rightarrow 1} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \cdot f(x)}{2 \ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x} = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1 \text{ άρα } F(1) = 1$$

$$g(x) = c \Rightarrow \frac{F(x)}{x^{\ln x}} = c, x > 0$$

$$\text{Για } x=1 \text{ έχουμε } \frac{F(1)}{1^{\ln 1}} = c \Leftrightarrow c=1 \text{ άρα } F(x) = x^{\ln x}, x > 0$$

Δ.3. F παραγωγίσιμη με $F'(x) = (x^{\ln x})' = (e^{\ln x \cdot \ln x})' = e^{\ln x \cdot \ln x} \cdot ((\ln x)^2)' = x^{\ln x} \cdot \frac{2 \ln x}{x} = x^{\ln x - 1} \cdot 2 \ln x, x > 0$

$$F'(x) = 0 \Leftrightarrow x^{\ln x - 1} \cdot 2 \ln x = 0 \stackrel{x^{\ln x - 1} > 0}{\Leftrightarrow} 2 \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$F'(x) > 0 \Leftrightarrow x^{\ln x - 1} \cdot 2 \ln x > 0 \stackrel{x^{\ln x - 1} > 0}{\Leftrightarrow} 2 \ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

$$F'(x) < 0 \Leftrightarrow x^{\ln x - 1} \cdot 2 \ln x < 0 \stackrel{x^{\ln x - 1} > 0}{\Leftrightarrow} 2 \ln x < 0 \Leftrightarrow \ln x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$$

Η μονοτονία της F προκύπτει από τον παρακάτω πίνακα

x	0	1	$+\infty$
$F'(x)$	-		+
$F(x)$		ΟΛ. ΕΛ.	

Άρα η F ως συνεχής είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$.

Η εξίσωση $F(x^2) = F(x) - (x-1)^2$ για $x > 0$ γίνεται $F(x^2) - F(x) = -(x-1)^2$

Για $x=1$: $F(1) - F(1) = 0 \Leftrightarrow 0=0$ άρα 1 προφανής λύση

Για $0 < x < 1 \Rightarrow 0 < x^2 < x < 1 \stackrel{F \searrow \text{ στο } (0,1)}{\Rightarrow} F(x^2) > F(x) \Rightarrow F(x^2) - F(x) > 0$

ενώ $-(x-1)^2 < 0$. Άρα η εξίσωση είναι αδύνατη για $0 < x < 1$.

Για $x > 1 \Rightarrow x^2 > x > 1 \stackrel{F \nearrow \text{ στο } (1,+\infty)}{\Rightarrow} F(x^2) > F(x) \Rightarrow F(x^2) - F(x) > 0$ ενώ $-(x-1)^2 < 0$. Άρα η εξίσωση είναι αδύνατη για $x > 1$.

Τελικά η εξίσωση έχει μοναδική ρίζα το 1.

β' τρόπος

$$F(x^2) = F(x) - (x-1)^2 \Leftrightarrow F(x) - F(x^2) = (x-1)^2$$

Προφανής ρίζα $x_0 = 1$ αφού $F(1^2) = F(1) - (1-1)^2 \Leftrightarrow F(1) = F(1)$ ισχύει

Για κάθε $0 < x < 1 \Leftrightarrow x^2 < x$, τότε η εξίσωση γίνεται:

$$\frac{F(x) - F(x^2)}{x - x^2} = \frac{(x-1)^2}{x - x^2} \Leftrightarrow \frac{F(x) - F(x^2)}{x - x^2} = -\frac{x-1}{x}$$

Θεωρούμε $F(t)$ με $t \in [x^2, x]$.

Η $F(t)$ είναι συνεχής στο $[x^2, x]$ και παραγωγίσιμη στο (x^2, x) .

Από Θ.Μ.Τ. υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in (x^2, x)$ τέτοιο ώστε $F'(\xi_1) = f(\xi_1) = \frac{F(x) - F(x^2)}{x - x^2}$

Άρα $f(\xi_1) = \xi_1^{\ln \xi_1} \cdot \frac{2 \ln \xi_1}{\xi_1} < 0$ για κάθε $\xi_1 < 1$ άρα $f(\xi_1) = -\frac{x-1}{x}$ για κάθε $x \in (0, 1)$. Αδύνατο,

αφού $f(\xi_1) < 0$ και $-\frac{x-1}{x} > 0$ για κάθε $x \in (0, 1)$.

Άρα δεν υπάρχει άλλη ρίζα για $x \in (0, 1)$.

Για κάθε $x > 1 \Rightarrow x^2 > x$, τότε η εξίσωση γίνεται:

$$F(x^2) - F(x) = -(x-1)^2 \Leftrightarrow \frac{F(x^2) - F(x)}{x^2 - x} = -\frac{(x-1)^2}{x^2 - x} \Leftrightarrow \frac{F(x^2) - F(x)}{x^2 - x} = -\frac{x-1}{x}$$

Θεωρούμε $F(t)$ με $t \in [x, x^2]$.

Η $F(t)$ είναι συνεχής στο $[x, x^2]$ και παραγωγίσιμη στο (x, x^2) .

Από Θ.Μ.Τ. υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in (x, x^2)$ τέτοιο ώστε $F'(\xi_2) = f(\xi_2) = \frac{F(x^2) - F(x)}{x^2 - x}$

όμως $F'(\xi_2) = f(\xi_2) = \xi_2^{\ln \xi_2} \cdot \frac{2 \ln \xi_2}{\xi_2} > 0$ για κάθε $\xi_2 > 1$.

Άρα $f(\xi_2) = -\frac{x-1}{x}$ για κάθε $x > 1$. Αδύνατο, αφού $f(\xi_2) > 0$ και $-\frac{x-1}{x} < 0$ για κάθε $x > 1$.

Άρα δεν υπάρχει άλλη ρίζα για $x > 1$.

Επομένως μοναδική ρίζα της εξίσωσης είναι η $x = 1$.

Δ.4. $E(\Omega) = \int_1^e |F(x)| dx$ όμως για $x \geq 1 \Leftrightarrow F(x) \geq F(1) \Leftrightarrow F(x) \geq 1 \Rightarrow F(x) > 0$ άρα $E(\Omega) = \int_1^e F(x) dx$

$$F(x) = x^{\ln x} = e^{(\ln x)^2}$$

$e^x \geq x+1$ θέτουμε όπου x το $\ln^2 x$

$e^{\ln^2 x} \geq \ln^2 x + 1 \Rightarrow F(x) \geq \ln^2 x + 1$ η ισότητα ισχύει μόνο για $\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$ άρα

$$\int_1^e F(x) dx > \int_1^e (\ln^2 x + 1) dx = \int_1^e \ln^2 x dx + \int_1^e 1 dx = (e-2) + (e-1) = 2e-3 \text{ γιατί}$$

$$\int_1^e \ln^2 x dx = \int_1^e x' \cdot \ln^2 x dx = [x \ln^2 x]_1^e - \int_1^e x \frac{2 \ln x}{x} dx = e \ln^2 e - 1 \ln^2 1 - \int_1^e 2 \ln x dx =$$

$$= e - \int_1^e (2x)' \ln x dx = e - [2x \ln x]_1^e + \int_1^e 2x \cdot \frac{1}{x} dx =$$

$$= e - (2e \ln e - 2 \cdot 1 \ln 1) + \int_1^e 2 dx = e - 2e + 2(e-1) = -e + 2e - 2 = e - 2$$

Άρα $E(\Omega) > 2e - 3$